

УДК 65.01

Т.М. БОРОВСЬКА,
кандидат технічних наук, доцент
Вінницького національного
технічного університету

І.С. КОЛЕСНИК,
аспірант
Вінницького національного
технічного університету

В.А. СЕВЕРІЛОВ,
кандидат технічних наук, доцент
Вінницького національного
технічного університету

ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ РОЗВИТКУ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ: РІШЕННЯ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ РОЗВИТКУ

Розглядається варіаційна задача розвитку виробничої системи з паралельно працюючими підрозділами. Критерій оптимальності – інтегральний, типу «накопичення за плановий період», управління – темп кредитів і пропорція розподілу ресурсів між накопиченням і розвитком. Завдання розбивається на завдання оптимального агрегування – заміну розподіленої виробничої системи оптимальним еквівалентним елементом і рішенням варіаційної задачі методом принципу максимуму. Багатовимірна оптимізаційна задача замінена послідовністю одновимірних задач. Отриманий розв'язок – база для розв'язання складніших задач інноваційного розвитку.

Ключові слова: *виробнича задача, критерій оптимальності, задача оптимального агрегування, багатовимірна оптимізаційна задача.*

Вступ, постановка завдання. Сьогодні для виробництв характерні короткі (3–8 років) життєві цикли – швидко і радикально змінюється номенклатура продукції, технології і конструкція. Природно, що організація намагається отримати максимум прибутку за період життєвого циклу – плановий період. Пошук конструктивних результатів дав тільки одну давню роботу Р. Беллмана – дослідження вараційної «задачі розподілу». Методологічна основа цієї розробки – саме ця робота Беллмана.

За мету поставлено створення узагальноної робочої моделі, що не має обмежень на вид цільових функцій і функцій обмежень. Як характеристики виробничих систем беремо функції виробництва (ФВ) і розвитку ФР [1, 2]. Розмірність ФВ: «(одиниць вимірювання продукту)/(одиниць вимірювання ресурсу)», розмірність ФР: «(одиниць вимірювання продукції за одиницю часу)/(одиниць вимірювання ресурсу за одиницю часу)». Змістовно ФР – залежність прирощення виробничої потужності від темпу витрат на їх створення. Залежність прирощення темпу виробництва від витрат ресурсу звичайно є результатом дії багатьох імовірнісних і детермінованих «механізмів». Однак саме наявність багатьох причин і факторів певним чином уніфікує і згладжує ці залежності – вони сходяться до функцій S-класу. При цьому ми шукаємо метод розв'язання

узагальненої задачі для довільних ФР, у тому числі і «негладких», таких що не мають неперервної похідної.

Сформулюємо узагальнену задачу. Маємо децентралізовану систему, де виробляються N видів продукції. Темпи випуску продукції дорівнюють $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$ (одиниць вимірювання продукції за місяць, квартал, рік). Рівняння динаміки виробничих потужностей

$$\frac{d}{dt}x(t)_i = \text{fin}(y(t)_i, i) = \text{fin}(x(t) \cdot u_i, i), \quad (1)$$

де $\text{fin}(y(t)_i, i)$ – функція розвитку для i -го виробництва, що належить до класу нестрого монотонно зростаючих функцій;

$$x(t) = \sum_{j=1}^N x(t)_j \text{ – сумарне виробництво в момент } t;$$

$0 \leq u(t)_i \leq 1$ – управління – частка сумарних поточних ресурсів, що виділяються в поточний момент для розширення виробничих потужностей по i -му продукту. Управління нормуються:

$$\sum_{j=1}^N u(t)_j + \text{unak}(t) = 1, \quad (2)$$

де $\text{unak}(t)$ – частка ресурсів, що йде в накопичення.

Потрібно визначити оптимальну стратегію розвитку, що максимізує сумарний накопичений випуск за певний плановий період T :

$$NJ = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^N x(t)_j \right) \cdot \text{unak}(t) dt. \quad (3)$$

Типова інтерпретація планового періоду T – момент зміни технології і конструкції виробу i , відповідно, засобів виробництва.

Розглянемо базову одновимірну задачу – з одним виробництвом.

Точне розв'язання узагальненої задачі розподілу. Варіаційні методи поки мало використовуються нематематиками. Отримаємо точний розв'язок. Вибираємо метод принципу максимуму Л. Понтрягіна, що замінює задачу оптимізації інтегрального функціонала послідовністю більш простих задач оптимізації функції Гамільтона. Задано:

$$J1 \int_0^{T_p} x(t) \cdot (1 - u(t)) dt \text{ – критерій оптимальності};$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \text{fin}(x(t) \cdot u(t)) \text{ – диференціальне рівняння динаміки темпу виробництва};$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \text{ – обмеження на управління.}$$

Подаємо задачу в канонічному вигляді – додаємо ще одну змінну стану – критерій і записуємо відповідні рівняння:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \text{fin}(x(t) \cdot u(t)) = f_x; \quad \frac{d}{dt}J1(t) = x(t) \cdot (1 - u(t)) = f_J. \quad (4)$$

Запишемо вираз для функції Гамільтона

$$H(x, u) = \sum_{i=0}^N \Psi_i \cdot f_i = \Psi_J \cdot f_J + \Psi_x \cdot f_x, \quad (5)$$

де f_J , f_x – праві частини рівнянь (4). Підставимо їх у (5)

$$H(x, u) = \Psi_J \cdot [x(t) \cdot (1 - u(t))] + \Psi_x \cdot \text{fin}(x(t) \cdot u(t)). \quad (6)$$

Записуємо рівняння для визначення спряжених функцій

$$\frac{d}{dt} \Psi J(t) = -\frac{\partial}{\partial J} H(x, u); \quad \frac{d}{dt} \Psi x(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x, u). \quad (7)$$

Знаходимо окремі похідні від $H(x, u)$ (5) і підставляємо їх в (7)

$$\frac{\partial}{\partial J} H(x, u) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} H(x, u) = \Psi J \cdot (1 - u) + \Psi x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{fin}(u \cdot x).$$

Розв'язуємо отримані диференціальні рівняння. Перше рівняння – елементарне:

$$\frac{d}{dt} \Psi J(t) = 0; \quad \Psi J(t) = \text{const} = 1.$$

Друге рівняння теж елементарне, для числових методів, але безнадійне для отримання аналітичних розв'язань:

$$\frac{d}{dt} \Psi x(t) = -\Psi J \cdot (1 - u) - \Psi x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{fin}(x) = -\Psi x(t) \cdot u \cdot \frac{\partial}{\partial x} \text{fin}(u \cdot x) - (1 - u). \quad (8)$$

Між іншим, «фізичний зміст» цієї спряженої функції – «ціна» виробничих потужностей відносно критерію оптимальності. Природно, що вона падає з часом, тому що ми включили в критерій тільки накопичення, тому «ціна» фондів з часом спадає до нуля. Це реалістично в умовах швидких змін технологій та засобів виробництва, коли обладнання не встигає відпрацювати свій фізичний ресурс. Підставимо розв'язання диференціальних рівнянь для спряжених функцій у (5) і отримаємо остаточний вираз для функції Гамільтона

$$H(x, u) = x(t) \cdot (1 - u(t)) + \Psi n(u, x, dFr, k) \cdot \text{fin}(x(t) \cdot u(t)). \quad (9)$$

Наближене розв'язання задачі розвитку. Сучасні автоматизовані системи управління виробництвом стають все більше «моделезалежними» – такими, що мають в контурі управління – модель-еталон або модель-предиктор. Це обумовлює потребу в швидких методах розробки задовільних моделей, і диктує відповідну технологію створення моделей для автоматизованих систем управління. Зокрема, отримання аналітичного розв'язання певної задачі управління є першим кроком створенням еталонних моделей для процесів розробки задовільних за точністю і обчислювально ефективних моделей для вбудовування в контури управління. В [3] отримане наближене розв'язання для оптимальних стратегій розвитку з позицій спеціаліста-практика, якому потрібно на кожному кроці процесу приймати рішення про розподіл поточного ресурсу між накопиченням і розвитком виробництва так, щоб максимізувати прирощення критерію (3) на момент закінчення процесу T . Отримано такий вираз для критерію прийняття рішень менеджером

$$H(x, u) = x(t) \cdot (1 - u(t)) + \text{fin}(x(t) \cdot u(t)) \cdot (T - t) \rightarrow \max(H(x, u))_{u \in (0..1)}. \quad (10)$$

Наше припущення про конвертованість ресурсів, з одного боку, робить задачу більш реалістичною, з іншого боку – суттєво спрощує її. Дійсно, кожна функція інвестицій тепер явно залежить тільки від одного управління. Спрощується також підінтегральна функція критерію оптимальності. Слід пам'ятати, що в реальних системах виділений ресурс сам по собі ще не гарантує певного прирощення виробничої потужності. Для реального розширення виробництва часто бувають необхідні десятки ресурсів і робіт, і все це повинно бути оптимізоване і скоординоване. Однак, відносно стратегічної задачі розвитку, це незалежні задачі субоптимізації.

Порівнюємо точне і наближене розв'язання. Дискретизуємо функцію Гамільтона (3) і порівнюємо її з наближенням (10).

$$\text{Точна: } H(x_k, u_k) = x_k \cdot (1 - u_k) + Fr(x_k \cdot u_k) \cdot \Psi n(u_k, x_k, dFr, t).$$

$$\text{Наближена: } Hi(u_k, x_k) = x_k \cdot (1 - u_k) + Fr(x_k \cdot u_k) \cdot (T - t).$$

Можна бачити, що вирази відрізняються тільки останнім множителем – маємо структурне наближення. Головне в запропонованій технології конструювання моделей – отримання функції користувача, що дає розв’язання задачі, в даному випадку – функцію часу.

Аналіз процесів розвитку. Первинний аналіз процесів розвитку виробничих систем складається з етапів: введення вхідних даних елементів, агрегування узагальнених виробничих функцій елементів, введення вхідних даних виробничої системи, побудова процесу розвитку, дезагрегування вхідів і виходів для кожного елемента, аналіз функцій Гамільтона. Під ці етапи неважко розробити орієнтовані на конкретний клас задач системи інтерфейсів. Далі подано приклад такої системи інтерфейсів.

На рис. 1. подано приклад модуля, де вводяться параметри функцій розвитку (ФР) елементів виробничої системи, робочі вирази (структурна формула оператора агрегування), оптимальна ФР системи, та графіки цих ФР та компоненти вектор-функції оптимального розподілу ресурсу.

Параметри елементів системи. Зміна ефективності інвестицій $oblom = 1$

Параметри функцій розвитку елементів $A1 := oblom \cdot 1$; $W1 := 0.3$; $S1 := 9$;
 $A2 := oblom \cdot 1.3$; $W2 := 0.16$; $S2 := 13$;
 $A3 := oblom \cdot 1.6$; $W3 := 0.10$; $S3 := 13$

Формуємо відповідні масиви $fo1_n := F4(n \cdot dx, A1, W1, S1)$; $f1 := augment(fo1, r0)$;
 $fo2_n := F4(n \cdot dx, A2, W2, S2)$; $f2 := augment(fo2, r0)$;
 $fo3_n := F4(n \cdot dx, A3, W3, S3)$; $f3 := augment(fo3, r0)$.

Запишемо формулу агрегування в звичайній формі: $Ops3 := f2o(f1, f2o(f2, f3))$.

і в структурній:

$$Ops3 := \begin{matrix} & f2o & \\ & / \quad \backslash & \\ f1 & & f2o \\ & & / \quad \backslash \\ & & f2 \quad f3 \end{matrix}$$

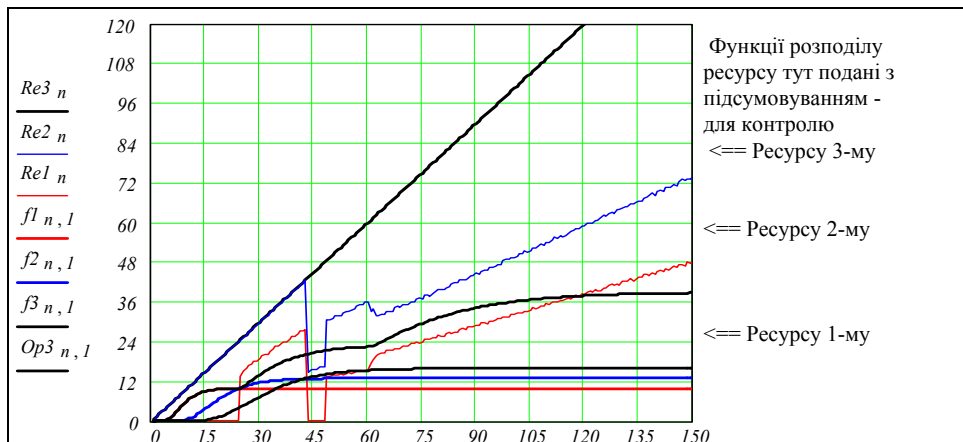


Рис. 1. Модуль «оптимальне агрегування функцій розвитку елементів виробничої системи»

На рис. 2 подано приклад інтерфейсу для програми моделювання та оптимізації процесу розвитку. В межах однієї екранної сторінки зібрано основні «входи» (параметри виробничої системи і процесу моделювання) і «виходи» (числа, графіки). Назвемо таку організацію інтерфейсу за аналогією з реальними системами – «стендом».

В конструюванні нових моделей для нових задач виникають задачі другого плану – розробка ефективних способів подання інформації – результатів моделювання. Ця задача подібна проектуванню дошки приладів автомобіля чи літака. На рис. 2 подано версію інтерфейсу (для навчання). Оптимальне управління, знайдене для еквівалентної агрегованої системи, потім розподіляється між

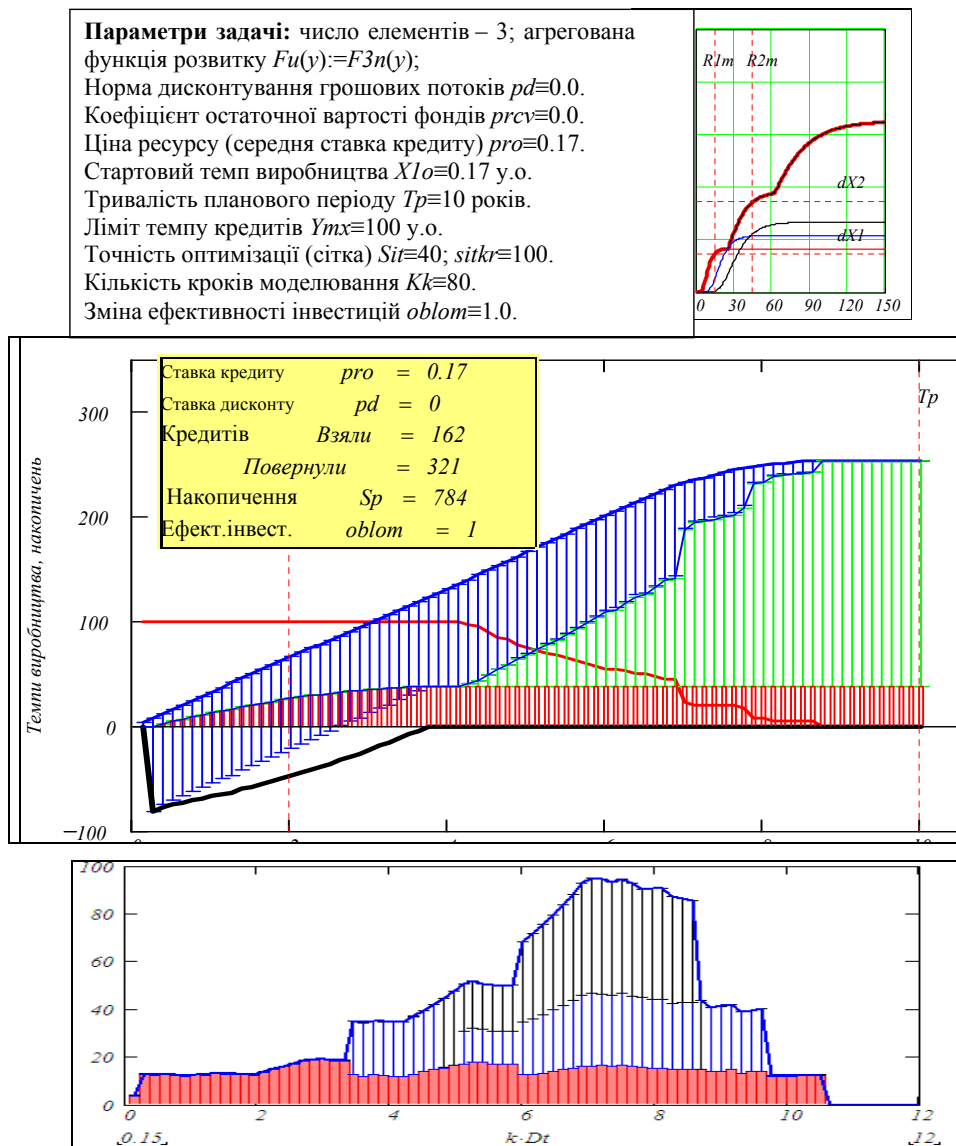


Рис. 2. Стенд для моделювання процесів розвитку. Приклад

елементами згідно з вектор-функцією оптимального розподілу ресурсу. В нижній частині рис. 2. подано «деагрегування» – розподіл ресурсу виділеного на розвиток між окремими елементами виробничої системи. В формальному плані – оператор оптимального агрегування має зворотний оператор – «деагрегування».

Деагрегування – визначення темпів інвестицій в різні виробничі елементи. Можемо бачити складний розривний характер розподілів для випадку невикпуклих ФР. Причина цих розривів – характер годографа максимуму функції Гамільтона. Безпосередній візуальний аналіз – перший крок до отримання наближених управлінь – візуальний аналіз функції Гамільтона. Для цього розроблено відповідний модуль. На рис. 3 подано еволюцію функції Гамільтона в часі. Поряд подані «першопричини» – функції розвитку елементів, та оптимальна еквівалентна ФР виробничої системи.

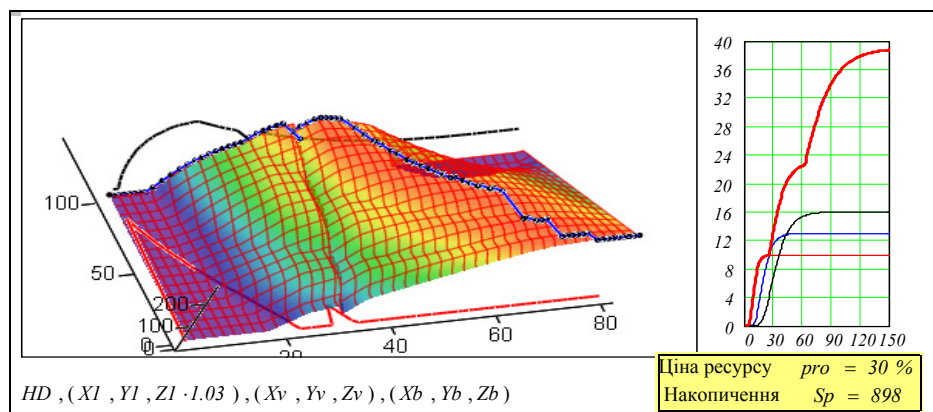


Рис. 3. Приклад еволюції функції Гамільтона. Невипуклі ФР

Також подано траєкторію максимумів та кредитну стратегію (темпи кредитів і повернення боргів). Бачимо складну структуру функції Гамільтона, що обумовлює складну структуру оптимальних управлінь.

Аналіз на базі безпосередньої побудови функції Гамільтона та годографа максимумів цієї функції є елементом новизни даної роботи – аналогів не знайдено. Перше застосування результату – пошук спрощених наближених стратегій розвитку.

Аналіз впливу невизначеностей. Наступний крок досліджень на моделі – що буде якщо аналіз (what if analysis). Вибір раціональної структури програми та інтерфейсів для етапу «аналіз процесів» суттєво спрощує розробку програми та інтерфейсів для наступного етапу – що буде якщо аналізу, або аналізу впливу розкиду параметрів. В теоретичному плані – вибір раціональної декомпозиції обумовлює мінімізацію витрат ресурсів і часу на розробку «нової моделі для нової задачі». Остання словесна формула означає наявність задачі, для якої ще не створені математичні моделі і відсутність математичних моделей, які можна було б застосувати для цієї нової задачі.

Модуль вводу для що буде якщо аналізу утворюється подвоєнням модуля аналізу процесів (рис. 1). Аналогічно створюється «стенд» – модифікацією базового «стенду» (рис. 2). Подаємо два оптимальні процеси розвитку: номінальний і збурений (можна трактувати їх як «оптимістичний» і «песимістичний» варіанти розвитку. Приклад стенду для що буде якщо аналізу подано на рис. 4.

Перше призначення цих розробок – навчання, навчальний процес: ті хто вже отримав якісну класичну освіту вкрай важко сприймають подібний інноваційний матеріал, незважаючи на повну працездатність результатів – робочих

програм. Друге призначення розробки – бути працюючими макетами для створення систем підтримки рішень. На рис. 4 подано зразок того, що видається кінцевому користувачу.

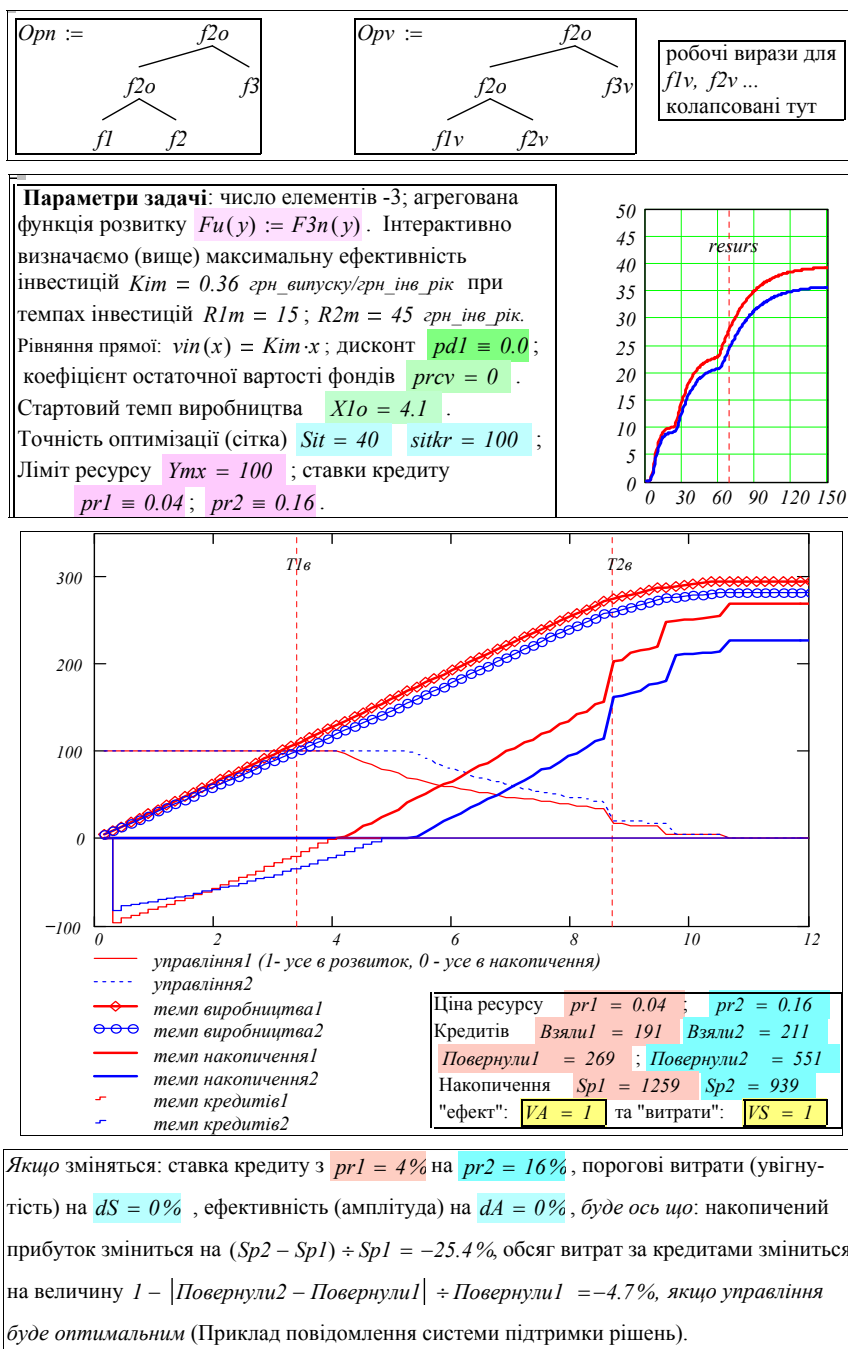


Рис. 4. Стенд для що буде якщо аналізу. Приклад

Висновки. Отримане нове узагальнене і обчислювально ефективне розв'язання техніко-економічної задачі оптимального розвитку. Розв'язання корисне, дозволяє отримувати задовільні розрахунки оптимальних стратегій розвитку, які в масовій світовій економічній літературі подаються на рівні емпіричних рецептів. Отримана модель – база для задач наступного рівня актуальності і складності.

Список використаної літератури

1. Боровська Т.М. Метод оптимального агрегування в оптимізаційних задачах: монографія / Т.М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 229 с.

2. Моделювання і оптимізація процесів розвитку виробничих систем з урахуванням використання зовнішніх ресурсів та ефектів освоєння: монографія / Т.М. Боровська, С.П. Бадьора, В.А. Северілов, П.В. Северілов; за заг. ред. Т.М. Боровської. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 255 с.

3. Моделювання задач управління інвестиціями: навч. пос. для студ. вищ. навч. закл. / Т.М. Боровська, В.А. Северілов, С.П. Бадьора, І.С. Колесник: Міністерство освіти і науки України. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 178 с.

Рассматривается вариационная задача развития производственной системы с параллельно работающими подразделениями. Критерий оптимальности – интегральный, вида «накопление за плановый период», управления – темп кредитов и пропорция распределения ресурсов между накоплением и развитием. Задача разбивается на задачу оптимального агрегирования – замену распределённой производственной системы оптимальным эквивалентным элементом и решением вариационной задачи методом принципа максимума. Многомерная оптимизационная задача заменена последовательностью одномерных задач. Полученное решение – база для решения более сложных задач инновационного развития.

Ключевые слова: производственная задача, критерии оптимальности, задача оптимального агрегирования, многомерная оптимизационная задача.

The variation task of development of the production system is examined with parallel workings subdivisions. Criterion of optimumness – integral, kind «accumulation for planned period», control variables are a rate of credits and proportion of allocation of resources between an accumulation and development. A task is decomposed on the task of optimum aggregation – replacement of the distributed production system an optimum equivalent element and decision of variation task by the method of principle of maximum. Multidimensional optimization task is changed by the sequence of one-dimension tasks. The got decision is a base for the decision of more sophisticate problems innovation development.

Key words: production target, optimality criterion, optimal aggregation task, multivariate optimization problem.

Надійшло до редакції 15.04.2011.