

УДК 330.4

**Ю.К. ТАРАНЕНКО,**  
*доктор технічних наук, професор  
Дніпропетровського університету  
імені Альфреда Нобеля*

**Н.О. РІЗУН,**  
*кандидат технічних наук, доцент  
Дніпропетровського університету  
імені Альфреда Нобеля*

**М.В. ГУДИМ,**  
*студент  
Дніпропетровського університету  
імені Альфреда Нобеля*

## **ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА В АВТОМАТИЗОВАНИХ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ**

*У статті розглянуто методику досягнення міжгалузевого балансу, яку розроблено В.В. Леонт'євим, шляхом імітаційного моделювання з використанням Simulink MatLab, що розширює можливості її аналізу завдяки повній візуалізації усіх складових балансових рівнянь та результатів їх розв'язання.*

**Ключові слова:** *економічна система, модель міжгалузевого балансу, рівняння, синтез, аналіз, Simulink, імітація, схема, блок.*

**Постановка проблеми.** Сучасні процеси та явища в економічних системах при їх постійних змінах все сильніше привертають свою увагу до питань і завдань збалансованості та врівноваженості економічних систем, особливо для їх поступового стабільного економічного розвитку.

Методологія імітаційного моделювання дозволяє виконувати дослідження економічних явищ у динаміці, виконувати симуляцію та аналіз навіть неможливих станів цільових об'єктів. Останніми роками активно розвиваються такі напрями використання імітаційного моделювання у економіці, як дослідження циклів зростання і падіння в економіці, пошуку оптимального оподаткування та масового обслуговування [1–3].

На сьогодні в умовах динамічного розвитку та трансформування суспільних відносин відбуваються постійні зміни у діяльності окремих господарських одиниць. Такі зміни та перетворення спричинено постійним розвитком технічного прогресу, зростанням виробничих потужностей, впровадженням новітніх технологій, які, у свою чергу, як показує історичний досвід довгострокових циклів, супроводжуються постійними процесами настання нестабільності, стагнацією чи спадом виробництва, часто з інфляційними впливами на економічний стан. Тому і важливо формувати і досліджувати напрями більш ефективного функціонування окремих економічних суб'єктів з урахуванням протиріч та проблем, що виникають внаслідок періодичних коливань економічної системи.

**Метою** статті є віднаходження і застосування новітніх технологій чи інформаційних систем розробки ефективних методів дослідження, аналізу, планування тощо економічних процесів та явищ діяльності окремих господарських одиниць і економічної системи загалом.

**Результати досліджень.** Розгляд проблем міжгалузевго балансу, дослідження властивостей як статичної, так і динамічної моделі міжгалузевго балансу, дали можливість та привели до необхідності її практичного застосування. Так, потрібно відзначити праці В.В. Леонт'єва, Р. Солоу, М. Морішіми, Р. Стоуна, А.Г. Гранберга, Б. Ершова, К. Алмона, Н.Ф. Шатілова. Найбільш відомим у науці та практиці є метод «Витрати – випуск», розроблений В.В. Леонт'євим, який і досі є актуальним на практиці та є однією з основних методик прогнозування та планування в галузях економіки.

Оскільки «національна економіка – це структурно і організаційно єдина система взаємопов'язаних галузей і сфер діяльності людей, якій властива відповідна пропорційність, взаємозумовленість розміщення на території, обмеженій державними кордонами» [4], то є обумовленість використовувати модель Леонт'єва для її дослідження.

Розглядаючи узагальнену модель деякої економічної системи (ЕС) та загальний її опис можна охарактеризувати зовнішнє середовище як природу, суспільство будь-яких економічних систем. На вході до неї подаються ресурси: природні, трудові, інтелектуальна інформація, капітали тощо. Економічна система складається з виробничих засобів (ВЗ) виробництва продукції та ВЗ її розподілу. Частина валової продукції використовується для виробництва іншої продукції, а частина – для споживання, нагромадження та експорту.

Для вирішення задачі використовується модель Леонт'єва «Витрати – Випуск» [5, 6], що вносить деякі позначки (показники):  $n$  – кількість галузей продукції;  $X = (x_i)_{i=1}^n$  – вектор валової продукції (вектор випуску);  $Y = (y_i)_{i=1}^n$  – вектор кінцевої продукції;  $W = (w_i)_{i=1}^n$  – вектор проміжної продукції (вектор витрат), де  $x_i$  – валова продукція  $i$ -ї галузі;  $y_i$  – кінцева продукція  $i$ -ї галузі;  $w_i$  – проміжна продукція  $i$ -ї галузі.

Економічна система характеризується матрицею  $A$  (виробнича матриця).  $A$  – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат  $= (a_{ij})_{i=1, \bar{n}}^{j=1, \bar{n}}$ , де  $a_{ij}$  – кількість продукції  $i$ -ї галузі, яка витрачається на виробництво одиниці продукції  $i$ -ї галузі (передбачається, що в кожній з галузей виробництво здійснюється одним і тим же технологічним способом) та яку можна привести до вигляду:

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y_j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1)$$

*Модель Леонт'єва* можна використовувати для того, щоб:

1) обчислити по заданій кількості кінцевої продукції ( $y_i$ ) необхідну кількість валової продукції ( $x_i$ ) (процес планування):

$$\text{Завдання синтезу } Y \rightarrow \text{Оператор} \rightarrow (I - A)^{-1} \rightarrow X;$$

2) при заданому рівні випуску валової продукції ( $x_i$ ) обчислити кількість кінцевого продукту ( $y_i$ ). Відоме як задача спостереження для моделі, яка відображає процес розподілу валової продукції:

$$\text{Завдання аналізу } X \rightarrow \text{Оператор} \rightarrow I - A \rightarrow Y;$$

3) дослідити вплив зміни технології на виробництві, тобто обчислити як впливають зміни  $a_{ij}$  на  $x_i$  і  $y_i$ .

Для зручності математичного дослідження модель записують у векторно-матричній формі  $(I - A)\bar{X} = \bar{Y}$ , або у вигляді  $\bar{X} = Ax = Y$ , де  $I$  – одинична матриця розміру  $n \times n$ ,  $A$  – виробнича матриця ЕС.

Існування єдиного рішення такої системи пов'язане з існуванням зворотної матриці  $C = (I - A)^{-1}$  (матриця Леонт'єва або матричний мультиплікатор моделі (скорочено – мультиплікатор Леонт'єва).

І якщо матриця  $V = (V_{ij})_{i=1,n}^{j=1,n}$  є матрицею коефіцієнтів повних витрат, то добуток матриці  $V$  на вектор кінцевого продукту  $Y$  дорівнює  $X$ .

Рішення завдання синтезу ( $y \rightarrow x$ ) має вигляд:

$$\bar{X} = V\bar{Y} = (I - A)^{-1}\bar{Y}. \quad (2)$$

Модель «Витрати – Випуск» по-іншому можна ще інтерпретувати як модель міжгалузевого балансу Леонт'єва. Її суть в тому, щоб на основі міжгалузевого балансу за попередній період (рік) та в умовах необхідності пріоритетного розвитку галузей господарства правильно спланувати валовий випуск продукції (ВВП) всіх галузей за поточний період. Це завдання можна розглядати в рамках окремого району, області, держави.

Якщо використати такі позначення:  $X_i$  – валовий випуск  $i$ -ї галузі в грошовому виразі;  $X_{ij}$  – обсяг продукції  $i$ -ї галузі, який використовується для забезпечення виробництва в  $j$ -й галузі;  $y_i$  – обсяг кінцевої продукції  $i$ -ї галузі для невиробничого призначення в грошовому виразі, можна отримати рівняння міжгалузевого балансу Леонт'єва:

$$X_i = \sum_{j=1}^n X_{ij} + y_j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

З виведенням  $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$  (або  $A$  – технологічної матриці) та за формулами (1) і (2) отримуємо наступне рівняння Леонт'єва:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_j, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

чи у матричному вигляді, якщо ввести такі позначення:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}, E - \text{одинична матриця } n \times n; \quad (5)$$

$$X = (E - A)^{-1}Y. \quad (6)$$

Оскільки така модель може бути легко перенесена на машинну автоматизовану обробку за допомогою ПК, було виявлено необхідність створення простого механізму (алгоритму) знаходження результатів при цій моделі економічно якіснішим та менш затратним способом.

Очікується, що дані, які вносяться та обробляються не лише зберігаються та приймаються як рішення для планування національних економічних процесів, але і для використання отриманих результатів надалі. Для дослідження наступного економічного становища тієї чи іншої галузі (галузей) як вхідні, оброблені в часі дані можуть бути попередні, що може значно спростувати з деякою мірою об'єктивності, ефективності, адекватності тощо отримання результату з використанням цієї моделі. Як правило, вхідні дані моделі накопичуються у вигляді статистичної інформації в окремих галузях економіки. Такі дані надають можливість використовувати їх для раціоналізації виробництва, раціоналізації вживання та використання ресурсів у різних масштабах. Завдяки ре-

лізації таких задач, використовуючи модель В.В. Леонтьєва, у матричному вигляді, приведену в зручній формі при автоматизації у сучасних умовах, можна досягти зручності, точності, гнучкості послідовних дій при знаходженні результатів та вихідної інформації. Якщо точність та зручність досягаються завдяки інтерфейсу та можливості програми як певного інформаційного продукту, то гнучкість відображає можливості алгоритму та застосування моделі в різних поставлених конкретних оптимізаційних задачах Леонтьєвим. При цьому потрібно враховувати різні обмеження, що накладаються на остаточний результат окремо за кожною умовою введення задачею завдань.

Тому серед поставлених задач існує функціональна залежність оптимізаційних функцій від поставлених до них обмежень чи синтезу та аналізу в періодах залежно від умови. Цей виведений алгоритм (механізм) дає змогу здійснювати планування в ході отримання вихідного матеріалу зі здатністю до його подальшого гнучкого використання. А також допомагає у здійсненні управлінської та контрольної функцій.

Отже, зобразимо таку послідовність дій у схемі, котру і можна перенести у вигляді алгоритму для програми (рис. 1):

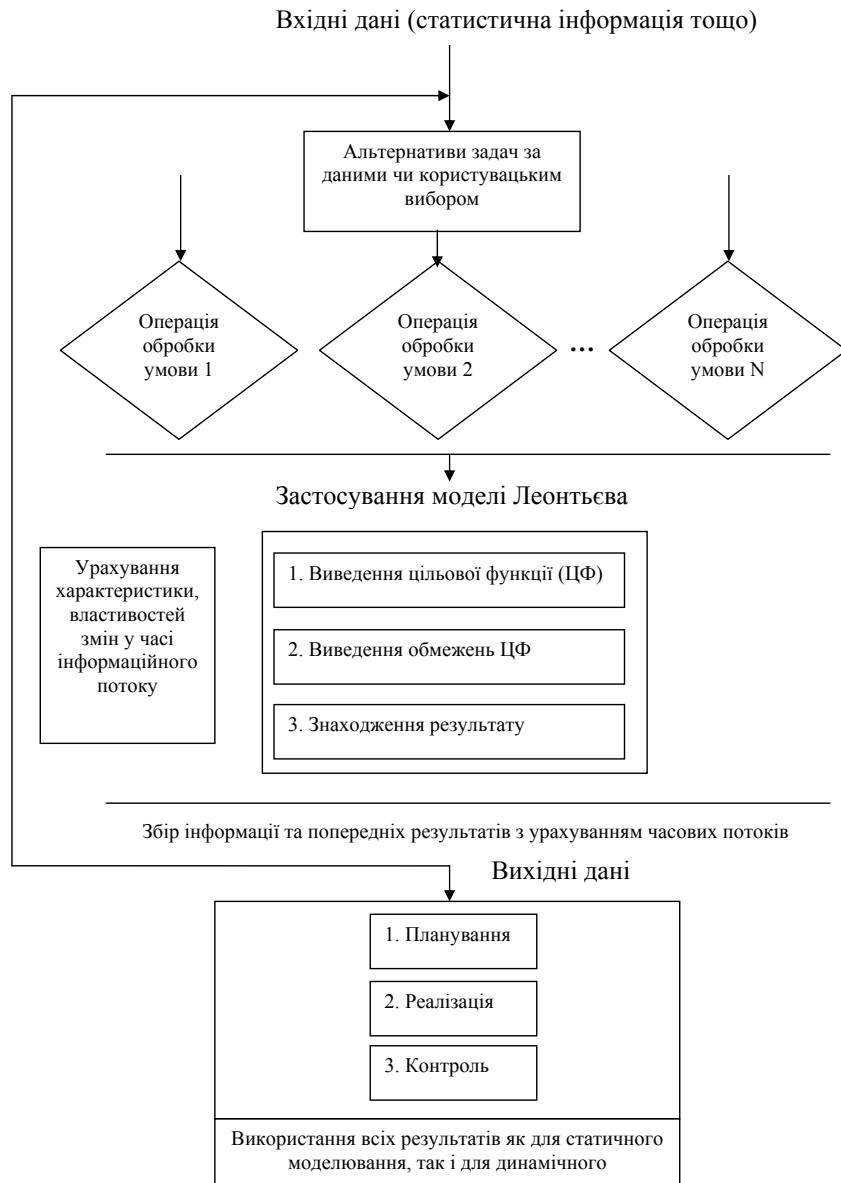
На сьогодні з технологічним розвитком і впливом його на суспільство існує цілий спектр різноманітних раціональних способів втілення методів і методик дослідження економічної системи через застосування на ЕОМ сучасного програмного забезпечення. За дослідження такого ПЗ на можливість використання його для імітаційного моделювання процесів та економічних явищ і реалізація, таким чином, вже існуючих методик, методів, моделей, законів та закономірностей через застосування ПЗ з метою автоматизації незмінних розрахунків беруться сучасні вчені. Такі програми як MathCad, MathLab (Simulink) для розрахунків та імітації найчастіше застосовуються в галузях економіки, тому і привертають увагу дослідників [7; 8].

Прикладом використання Simulink MathLab в економіці є його застосування для підприємства виробництва продукції хімічної галузі, завданням якої є оптимальне використання ресурсів та подовження часу експлуатації обладнання у виробництві. При цьому розроблена модель виробничого процесу такого підприємства в Simulink з урахуванням виведення з експлуатації обладнання дозволила без практичної реалізації зміни різних ресурсів та потужностей виробництва (факторів виробництва), що потрібно для виробництва різної продукції, дослідити різний вплив на обладнання та виробництво на основі такої моделі, що у такому випадку скорочує затрати на дослідження і надає можливість передбачувати результати плану, стратегій виробництва. А тому і доцільно використовувати Simulink, який легко дозволяє модулювання економічні процеси та явища як для бізнесу, так і для народного господарства.

Отже, основна функціональна частина розробленої в роботі схеми-алгоритму, що задана моделлю міжгалузевого балансу, може бути реалізована саме таким інформаційним забезпеченням, адже також є можливість використовувати математичні інструменти. У цій роботі розроблено вперше імітаційну модель на основі Simulink MatLab, що через застосування моделі В.В. Леонтьєва генерує результати задачі синтезу та надає можливість створення плану щодо валового виробництва продукції між взаємопов'язаними галузями. Модель подано у вигляді схеми взаємопов'язаних блоків. Усі блоки, подані у цій моделі, можна поділити на три групи: вхідні дані, група блоків знаходження результату та кінцеві вихідні результати.

Розглянемо задачу із знаходження міжгалузевого балансу за будь-який період (поточний рік), при цьому використовуючи данні за попередній період (попередній рік).

Зовнішнє середовище



Зовнішнє середовище

Рис. 1. Схема-алгоритм реалізації моделі Леонтєва

У першій групі – блоки констант, постійних величин *Constant*, що отримують дані за попередній період  $x_i$  і  $x_j$  та  $y_i$ , а також потрібна для розрахунків одинична матриця *E*.

У другій групі:

а) блок множення *Product*, що виконує операцію з елементного ділення для знаходження у результаті матриці коефіцієнтів прямих матеріальних ви-

трат, технологічна матриця  $A = (a_{ij})_{i=1, \bar{n}}^{j=1, \bar{n}}$ , де  $\frac{x_{ij}}{x_j} = a_{ij}$  – кількість продукції  $i$ -ї галузі, яка витрачається на виробництво одиниці продукції  $j$ -ї галузі (передбачається, що в кожній з галузей виробництво здійснюється одним і тим же технологічним способом);

б) блок суми *Sum*, що задає різницю між одиничною матрицею та матрицею  $A$ ;

в) блок множення *Product*, що виконує операцію знаходження оберненої матриці  $V = (E - A)^{-1}$  – матриці повних затрат, з результату виведеного та наведеного в б);

г) блок множення *Product*, який у випадку конкретної задачі може використовуватися для знаходження кінцевої продукції поточного періоду, якщо відомі та задаються положення того, як потрібно змінити значення випуску кінцевої продукції попереднього періоду, щоб отримати значення за поточний. Цей блок задає операцію множення між попередніми значеннями кінцевої продукції та коефіцієнтами їх зміни порівняно зі значеннями поточного періоду, а отже, в результаті отримаємо чисельні значення випуску кінцевої продукції поточного періоду, що можна подати у вигляді матриці  $Y$ .

Блоки в) та г), у свою чергу, використовуються, як і задано задачею синтезу, для знаходження кінцевого результату.

При цьому третя група:

а) блок множення *Product*, який виконує операцію матричного множення оберненої матриці  $V$  та вектору-матриці  $Y$ , а отже, виконує дію знаходження матриці валового випуску продукції  $X$ , яка буде розрахована на поточний період, період планування. Рішення завдання синтезу ( $y \rightarrow x$ ) має вигляд:

$$\bar{X} = V\bar{Y} = (I - A)^{-1}\bar{Y}; \quad (7)$$

б) блоки цифрового дисплею *Display*, що виносять та показують усі проміжні результати та кінцевий.

Розглянемо для прикладу задачу (рішення якої порівнюватиметься паралельно зі знайденим у MathCad):

Завдання: За попередній рік вісім галузей народного господарства дали можливість складення *таблиці міжгалузевого балансу* (табл. 1):

Таблиця 1

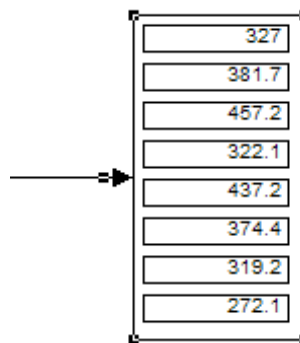
№ з/п	Галузь								Кінцевий продукт	Валовий випуск	
	1	2	3	4	5	6	7	8			
Галузь	1	10	20	30	40	20	10	30	40	100	300
	2	20	10	40	30	10	20	40	30	150	350
	3	40	20	10	20	30	10	30	40	200	400
	4	20	20	10	40	40	30	10	30	100	300
	5	10	40	20	20	30	30	40	10	200	300
	6	10	30	20	40	20	40	30	10	150	350
	7	40	30	10	20	40	30	20	10	100	300
	8	10	10	20	20	30	30	40	40	50	250

Знайти план валового випуску за поточний рік за умови, що кінцевий продукт першої галузі збільшився на 9%; другої – на 9; третьої – на 20; четвертої – на 5; п'ятої – на 10; шостої – на 5; сьомої – на 2 та восьмої – на 10%.

Відповідь:

$$X := (E - A)^{-1} \cdot Y = \begin{pmatrix} 310.5 \\ 379.1 \\ 453.8 \\ 319.7 \\ 435.1 \\ 372.4 \\ 315.8 \\ 270.1 \end{pmatrix}$$

За формулою в MathCad



За блок-схемою в Simulink

Рис. 2. Результати розв'язання задачі

Слід зазначити, що результати в обох випадках не різняться більше ніж на 5%, що спричинено точністю розрахунків.

При цьому, на відміну від MathCad, у Simulink є можливість наглядно генерувати результати при змінах початкових даних  $N$ -у кількість разів на різних стадіях розрахунків.

**Висновки.** За останні роки з'явилася велика кількість різноманітних способів раціонального застосування ПО для реалізації дійових моделей економіки. У цій роботі розглянуто основи міжгалузевої моделі Леонт'єва з використанням Simulink (MathLab) – інтерактивний інструмент (програмне забезпечення) для моделювання, імітації та аналізу динамічних систем, включаючи дискретні, неперервні та гібридні, нелінійні та розривні системи, та досліджено певні її можливості, тобто створено й описано схему з використанням Simulink, що застосовує модель В.В. Леонт'єва. Виявлено простоту повторного використання моделі міжгалузевого балансу на основі імітаційної схеми Simulink, завдяки чому зменшується навантаження при розрахунках та досягається значна гнучкість моделі в умовах динамічності економічної системи, різній постановці задачі (аналіз, синтез, порівняння). Таким чином, активні дослідження та розробка й покращання ПЗ, що може застосовувати математичні інструменти в економіці, у моделюванні процесів і явищ, та застосування вже існуючих моделей надає можливість постійного покращання їх використання.

#### Список використаної літератури

1. Горшенина Е.В. Региональные экономические исследования: теория и практика: монография / Е.В. Горшенина. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2009. – 203 с.
2. Павловский Ю.Н. Имитационное моделирование / Ю.Н. Павловский, Н.В. Белотелов, Ю.И. Бродский. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 236 с.
3. Мицель А.А. Разработка системы имитационного моделирования экономических объектов на основе объектно-ориентированного подхода / А.А. Мицель, Е.Б. Грибанова // Известия ТПУ. – 2007. – Т. 311, № 6. – С. 11–15.
4. Леонт'єв В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонт'єв. – М.: ОАО «Издательство «Экономика», 1997. – 479 с.
5. Ляшенко І.М. Прямі та двоїсті балансові моделі «витрати-випуск» / І.М. Ляшенко, А.М. Онищенко // Економічна кібернетика. – Донецьк, 2009. – № 1. – С. 55–63.



6. Семенчин Е.А. О разрешимости динамической модели Леонтьева / Е.А. Семенчин, З.М. Лайпанова // Обзорные прикладной и промышленной математики. – М., 2007. – Т. 14. – Вып. 2. – С. 348–349.

7. Дэбни Дж. Simulink 4. Секреты мастерства / Дж. Дэбни, Т. Харман. – М.: Бином; Лаборатория базовых знаний, 2003. – 403 с.

8. Ханова А.А. Имитационное моделирование предметной области студентами экономических специальностей / А.А. Ханова, А.А. Семейкина // Вестник АГТУ. – 2008 – № 1. – С. 182–187.

*В статье рассмотрена методика достижения межотраслевого баланса, разработанная В.В. Леонтьевым, путем имитационного моделирования с использованием Simulink MatLab, что расширяет возможности ее анализа благодаря полной визуализации всех составляющих балансовых уравнений и результатов их решения.*

**Ключевые слова:** экономическая система, модель межотраслевого баланса, уравнения, синтез, анализ, Simulink, имитация, схема, блок.

*The article is about the method of achieving interbranch balance, which was developed by W.W. Leontief, via simulation using Simulink MatLab. This approach extends the capabilities of its analysis through the full visualization of all components of the balance equations and the results of their decisions.*

**Key words:** economic system, model interbranch balance, equation, synthesis, analysis, Simulink, simulation, scheme, block.

*Одержано 21.01.2013.*